Analisi Matematica 1, Ing. Gestionale 2023-2024 (787AA)
Appello 4

03-06-2024

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 4, 03-06-2024

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE A

1. Calcolare la derivata di $f(x) = e^x \arcsin(\sqrt{x})$.

   Sol. $f'(x) = e^x \left(\arcsin(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}\right)$.

2. Dire, giustificandolo, se una funzione dispari può avere coefficienti non nulli dei monomi di grado pari nel suo sviluppo di Taylor in intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. No, poiché le derivate di ordine pari sono dispari quindi valgono zero in $x_0 = 0$.

3. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{e^{x^3}}_{a}, \quad \underbrace{x^{10}}_{b}, \quad \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x^2}}_{c}, \quad \underbrace{\frac{10+\sin x}{x}}_{d}.$$

   Sol. $c \ll d \ll b \ll a$.

4. Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3 x}{x}$ e (b) $\lim_{x\to 1} \frac{(1-\cos(x-1))^2}{(x-1)^4}$.

   Sol. (a) $\ell = 0$, (b) $\ell = 1/4$.

5. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x'(t) + te^{-t^2}x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = ce^{\frac{e^{-t^2}}{2}}$.

6. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = |x-1|$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intervallo $[-1, 3]$.

   Sol. No, non è derivabile in $x = 1$.

7. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{x^2+1}dx$.

   Sol. $x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 2\arctan x + c$.

8. Scrivere in coordinate polari i numeri complessi (a) $z = 10i$ e (b) $z = -1-i$.

   Sol. (a) $(\rho, \theta) = (10, \frac{\pi}{2})$ e (b) $(\rho, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$.

9. Dare la definizione di funzione convessa.

   Sol. $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ con $x_1 < x_2$ e $t \in [0, 1]$.

10. Disegnare la regione di piano definita da $|x+y| \leq 1$.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 4, 03-06-2024

NOME E COGNOME: ________________________ **MATRICOLA:** ________________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE B

1. Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^2 x}{\log(\log(x))}$ e (b) $\lim_{x\to 1} \frac{(1-\cos(x-1))^3}{(x-1)^6}$.

   Sol. (a) $\ell = +\infty$ e (b) $\ell = \frac{1}{8}$.

2. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x'(t) + t^2 e^{-t^3} x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = ce^{\frac{e^{-t^3}}{3}}$.

3. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = |x-2|$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intervallo $[-2, 6]$.

   Sol. No, non è derivabile in $x = 2$.

4. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}dx$.

   Sol. $x + \log(x^2+1) - 2\arctan x + c$.

5. Scrivere in coordinate polari i numeri complessi (a) $z = -7i$ e (b) $z = -1+i$.

   Sol. (a) $(\rho,\theta) = (7, \frac{3\pi}{2})$ e (b) $(\rho,\theta) = (\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

6. Dare la definizione di funzione concava.

   Sol. $f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ con $x_1 < x_2$ e $t \in [0,1]$.

7. Calcolare la derivata di $f(x) = e^{\sqrt{x}} \arcsin(x)$.

   Sol. $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \left(\frac{\arcsin x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$.

8. Dire, giustificandolo, se una funzione pari può avere coefficienti non nulli dei monomi di grado dispari nel suo sviluppo di Taylor in intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. No, poiché le derivate di ordine dispari sono dispari quindi valgono zero in $x_0 = 0$.

9. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\frac{1+\sin^2 x}{x}}_{a}, \qquad \underbrace{x\log x}_{b}, \qquad \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}_{c}, \qquad \underbrace{e^{-x^3}}_{d}.$$

   Sol. $d \ll a \ll b \ll c$.

10. Disegnare la regione di piano definita da $|x-y| \leq 1$.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 4, 03-06-2024

NOME E COGNOME: ____________________ **MATRICOLA:** ____________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE C

1. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x'(t) + t^3 e^{-t^4} x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = ce^{\frac{e^{-t^4}}{4}}$.

2. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = |x+1|$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intervallo $[-3, 1]$.

   Sol. No, non è derivabile in $x = -1$.

3. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 1} dx$.

   Sol. $x - \log(x^2 + 1) - 2 \arctan x + c$.

4. Scrivere in coordinate polari i numeri complessi (a) $z = 4$ e (b) $z = \sqrt{3} + i$.

   Sol. (a) $(\rho, \theta) = (4, 0)$ e (b) $(\rho, \theta) = (2, \frac{\pi}{6})$.

5. Dare la definizione di funzione convessa.

   Sol. $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ con $x_1 < x_2$ e $t \in [0, 1]$.

6. Calcolare la derivata di $f(x) = e^{x^2} \arcsin(\sqrt{x})$.

   Sol. $f'(x) = e^{x^2} \left(2x \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}} \right)$.

7. Dire, giustificandolo, se una funzione dispari può avere coefficienti non nulli dei monomi di grado pari nel suo sviluppo di Taylor in intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. No, poiché le derivate di ordine pari sono dispari quindi valgono zero in $x_0 = 0$.

8. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\frac{2 + \sin(x^2)}{x^2}}_{a}, \quad \underbrace{e^{x^5}}_{b}, \quad \underbrace{x^{20}}_{c}, \quad \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-x^4}}_{d}.$$

   Sol. $d \ll a \ll c \ll b$

9. Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log(\log(x))}$ e (b) $\lim_{x \to 1} \frac{\sin^3(1-x)}{(x-1)^3}$.

   Sol. (a) $\ell = +\infty$ e (b) $\ell = -1$.

10. Disegnare la regione di piano definita da $|x + y| \geq 1$.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 4, 03-06-2024

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 1h20. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 1, VERSIONE D

1. Calcolare la derivata di $f(x) = e^{x^3} \arcsin(x^{-1})$.

   Sol. $f'(x) = e^{x^3}\left(3x^2 \arcsin(x^{-1}) - \frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}\right)$.

2. Dire, giustificandolo, se una funzione pari può avere coefficienti non nulli dei monomi di grado dispari nel suo sviluppo di Taylor in intorno di $x_0 = 0$.

   Sol. No, poiché le derivate di ordine dispari sono dispari quindi valgono zero in $x_0 = 0$.

3. Ordinare, secondo la relazione $\ll$, le seguenti funzioni per $x \to +\infty$

$$\underbrace{x^x}_{a}, \qquad \underbrace{\frac{4+\sin^4 x}{x}}_{b}, \qquad \underbrace{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{x^4}}_{c}, \qquad \underbrace{e^{-x^4}}_{d}.$$

   Sol. $d \ll b \ll c \ll a$.

4. Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^5 x}{x^2}$ e (b) $\lim_{x\to 1} \frac{(\sin(x-1))^5}{(1-x)^5}$.

   Sol. (a) $\ell = 0$ e (b) $\ell = -1$.

5. Dare la definizione di funzione concava.

   Sol. $f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ con $x_1 < x_2$ e $t \in [0,1]$.

6. Si trovi la soluzione $x(t)$ di $x'(t) + t^4 e^{-t^5} x(t) = 0$.

   Sol. $x(t) = ce^{\frac{e^{-t^5}}{5}}$.

7. Dire, giustificandolo, se la funzione $f(x) = |x+2|$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle sull'intervallo $[-6,2]$.

   Sol. No, non è derivabile in $x = -2$.

8. Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - 1}{x^2+1} dx$.

   Sol. $x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 2\arctan x + c$.

9. Scrivere in coordinate polari i numeri complessi (a) $z = -13$ e (b) $z = -\sqrt{3} + i$.

   Sol. (a) $(\rho,\theta) = (13,\pi)$ e (b) $(\rho,\theta) = (2, \frac{5\pi}{6})$.

10. Disegnare la regione di piano definita da $|x-y| \geq 1$.

    Sol.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), APPELLO 4, 03-06-2024

NOME E COGNOME:		MATRICOLA:	

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE I

1. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia. Si discuta la seguente affermazione: la funzione è convessa nel semiasse negativo delle ascisse, ovvero in $\mathbb{R}^-$. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Si dica, giustificandolo, se la funzione è invertibile nell'intervallo $(0, 1)$.
   Calcolare l'area sottesa al grafico della funzione $|f(x)|$ nell'intervallo $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

2. Si consideri l'equazione $y''(t) + 3\beta y'(t) + 2y(t) = 0$, con $\beta \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori del parametro β tali che tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate.
   Per i valori di β come nel punto precedente, si scriva lo sviluppo di Taylor al terzo ordine della soluzione in un intorno di $t = 0$.

Sol. 1. $f(x)$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, non è dispari né pari, tende a 0 per $x \to \pm\infty$, a $+\infty$ se $x \to 0$, a $-\infty$ se $x \to 1$. Quindi funzione illimitata superiormente e inferiormente, ovvero $\sup f = \infty$ e $\inf f = -\infty$.
$f(x) = 0$ se e solo se $\frac{-2x+1}{x^2(x-1)^2} = 0$, quindi se e solo se $x = \frac{1}{2}$.
La derivata è $f'(x) = 2\left(\frac{3x^2-3x+1}{x^3(x-1)^3}\right)$, quindi poiché $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, il segno della derivata dipende solo dal segno del denominatore. Pertanto la funzione ha derivata prima positiva per $x < 0$ e per $x > 1$, ed è negativa per $x \in (0, 1)$. Ne consegue che nel primo caso la funzione è crescente, nell'altro decrescente. Non ci sono punti di minimo/max locali.
Per gli intervalli di convessità studiamo la derivata seconda. $f''(x) = 6\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x-1)^4}\right) = 6\left(\frac{-4x^3+6x^2-4x+1}{x^4(x-1)^4}\right)$. Si osserva che se $x < 0$, il numeratore è sempre positivo, così come il denominatore. Quindi in $\mathbb{R}^-$ la funzione è sempre convessa.
La funzione è invertibile in $(0, 1)$ in quanto monotona.
Si calcola l'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} |f(x)|dx = \int_{1/4}^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^{3/4} f(x)dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\Big|_{1/4}^{1/2} - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\Big|_{1/2}^{3/4} = \frac{8}{3}.$$

Sol. 2. La soluzione dell'equazione (omogenea) si trova calcolando le radici del polinomio caratteristico associato $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\beta\lambda + 2 = 0$ che ha soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{-3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 8}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-3\beta - \sqrt{9\beta^2 - 8}}{2}.$$

Queste ultime sono reali e distinte se $\Delta = 9\beta^2 - 8 > 0$, reali e coincidenti se $\Delta = 9\beta^2 - 8 = 0$, complesse coniugate se $\Delta = 9\beta^2 - 8 < 0$. Quindi se, rispettivamente, $|\beta| > \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\beta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $|\beta| < \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Nel primo caso le soluzioni sono date da $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. Indipendentemente dal segno delle radici $\lambda_{1,2}$, ci sono soluzioni divergenti a $+\infty$ o $-\infty$.
Nel secondo caso le soluzioni sono date da $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} = e^{\pm\sqrt{2}t}(c_1 + c_2 t)$ (poiché $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm\sqrt{2}$).
Nel terzo caso le soluzioni sono date da $y(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{8-9\beta^2}}{2}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{8-9\beta^2}}{2}t))$. Nel caso $\beta = 0$ le soluzioni sono tutte limitate.

Si ha che $y(t) = c_1(1 - t^2) + c_2(\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{3}t^3) + o(t^3)$.

ANALISI MATEMATICA 1, ING. GESTIONALE (787AA), 4, 03-06-2024

NOME E COGNOME: ______________________ **MATRICOLA:** ______________

Durata: 2h. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Parte 2, VERSIONE II

1. Sia data la funzione $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$.
   Determinarne dominio, immagine, simmetrie, inf e sup, massimi e minimi relativi e assoluti, intervalli di monotonia. Si discuta la seguente affermazione: la funzione è concava nel semiasse positivo delle ascisse, ovvero in $\mathbb{R}^+$. Disegnarne infine il grafico sugli assi cartesiani.
   Si dica, giustificandolo, se la funzione è invertibile nell'intervallo $(-1,0)$.
   Calcolare l'area sottesa al grafico della funzione $|f(x)|$ nell'intervallo $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$.

2. Si consideri l'equazione $y''(t) - \beta y'(t) + 3y(t) = 0$, con $\beta \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori del parametro β tali che tutte le soluzioni dell'equazione sono limitate.
   Per i valori di β come nel punto precedente, si scriva lo sviluppo di Taylor al terzo ordine della soluzione in un intorno di $t = 0$.

Sol. 1. $f(x)$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, non è dispari né pari, tende a 0 per $x \to \pm\infty$, a $-\infty$ se $x \to 0$, a $+\infty$ se $x \to -1$. Quindi funzione illimitata superiormente e inferiormente, ovvero $\sup f = \infty$ e $\inf f = -\infty$.
$f(x) = 0$ se e solo se $\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} = 0$, quindi se e solo se $x = -\frac{1}{2}$.
La derivata è $f'(x) = 2\left(\frac{3x^2+3x+1}{x^3(x+1)^3}\right)$, quindi poiché $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, il segno della derivata dipende solo dal segno del denominatore. Pertanto la funzione ha derivata prima positiva per $x < -1$ e per $x > 0$, ed è negativa per $x \in (-1, 0)$. Ne consegue che nel primo caso la funzione è crescente, nell'altro decrescente. Non ci sono punti di minimo/max locali.
Per gli intervalli di convessità studiamo la derivata seconda. $f''(x) = 6\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{(x-1)^4}\right) = 6\left(\frac{-4x^3-6x^2-4x-1}{x^4(x-1)^4}\right)$. Si osserva che se $x > 0$, il numeratore è sempre negativo, mentre il denominatore è sempre positivo. Quindi in $\mathbb{R}^+$ la funzione è sempre concava.
La funzione è invertibile in $(-1, 0)$ in quanto monotona.
Si calcola l'integrale

$$\int_{-3/4}^{-1/4} |f(x)|dx = \int_{-3/4}^{-1/2} f(x)dx - \int_{-1/2}^{-1/4} f(x)dx = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\Big|_{-3/4}^{-1/2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\Big|_{-1/2}^{-1/4} = \frac{8}{3}.$$

Sol. 2. La soluzione dell'equazione (omogenea) si trova calcolando le radici del polinomio caratteristico associato $p(\lambda) = \lambda^2 - \beta\lambda + 3 = 0$ che ha soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 12}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 12}}{2}.$$

Queste ultime sono reali e distinte se $\Delta = \beta^2 - 12 > 0$, reali e coincidenti se $\Delta = \beta^2 - 12 = 0$, complesse coniugate se $\Delta = \beta^2 - 12 < 0$. Quindi se, rispettivamente, $|\beta| > 2\sqrt{3}$, $\beta = \pm 2\sqrt{3}$, $|\beta| < 2\sqrt{3}$.

Nel primo caso le soluzioni sono date da $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. Indipendentemente dal segno delle radici $\lambda_{1,2}$, ci sono soluzioni divergenti a $+\infty$ o $-\infty$.
Nel secondo caso le soluzioni sono date da $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t} = e^{\pm\sqrt{3}t}(c_1 + c_2 t)$ (poiché $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm\sqrt{3}$).
Nel terzo caso le soluzioni sono date da $y(t) = e^{\frac{\beta}{2}t}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{12-\beta^2}}{2}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{12-\beta^2}}{2}t))$. Nel caso $\beta = 0$ le soluzioni sono tutte limitate.

Si ha che $y(t) = c_1(1 - \frac{3}{2}t^2) + c_2(\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{2}t^3) + o(t^3)$.